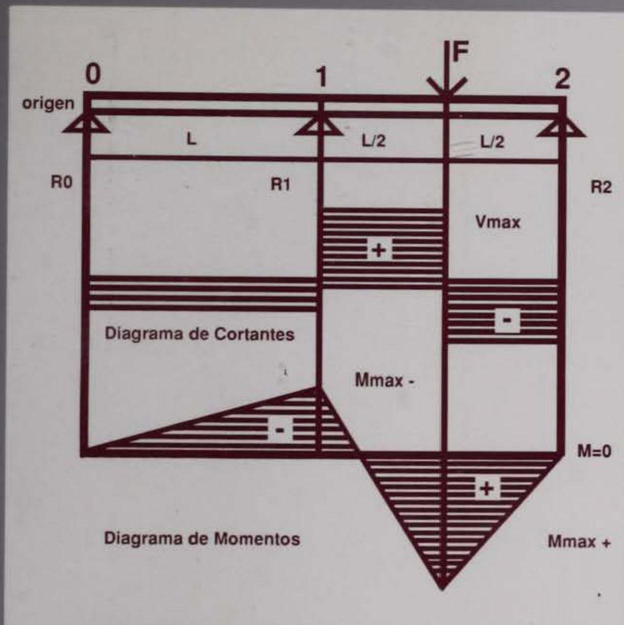
1027



VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

ARQ. CARLOS GARCIA MALO

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
UNIDAD AZCAPOTZALCO
División de Ciencias y Artes para el Diseño
Departamento de Procesos y Técnicas de Realización

69

ARQ. CARLOS GARCIA MALO

Profesor de las materias de Estática, Resistencia de Materiales, Estructuras, Métodos Matemáticos y Geometría Descriptiva en la Universidad Autónoma Metropolitana desde el año de 1976.

Profesor en las materias de Estática, Resistencia de Materiales, Análisis y Diseño Estructural en la Escuela Mexicana de Arquitectura de la Universidad La Salle desde el año de 1974.

Profesor en las materias de Resistencia de Materiales, Análisis y Diseño Estructural, Geometría Descriptiva en la Escuela de Arquitectura y Diseño de la Universidad Anahuac.

En el campo profesional, ha participado en el Diseño, cálculo y construcción de Estructuras de Acero y de Concreto Reforzado.

218552
C.B 2894812

VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

ARQ. CARLOS GARCIA MALO

AZCAPOTZALCO
BIBLIOTECA

2894812

242182

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA AZCAPOTZALCO
Casa abierta al tiempo
División de Ciencias y Artes para el Diseño
Departamento de Procesos y Técnicas de Realización.

UAM
TA660
V5
G3.75

Dr. Gustavo A. Chapela Castañares
Rector General

Dr. Enrique Fernández Fassnacht
Secretario General

Lic. Edmundo Jacobo Molina
Rector Unidad Azcapotzalco

Mtro. Adrián de Garay Sánchez
Secretario de Unidad

M.D.I. Emilio Martínez de Velasco
Director División de Ciencias y Artes para el Diseño

Arq. Rosa Elena Alvarez Martínez
Jefe Depto. Procesos y Técnicas de Realización

Arq. Tomás Sosa Pedroza
Jefe Area de Tecnología y Diseño para la producción de Espacios

AZCAPOTZALCO
BIBLIOTECA

Fotomecánica e impresión de la portada
Talleres de Diseño CYAD

Impresión interior
Taller de Impresión y Reproducción CSU

Derechos Reservados
©1993 Universidad Autónoma Metropolitana
División de Ciencias y Artes para el Diseño
Av. San Pablo 180 Col Reynosa
Azcapotzalco C.P. 02200

INDICE DE CONTENIDO.

Pág

PROLOGO 2

INTRODUCCION 4

ANTECEDENTES 8

VIGA CONTINUA CON CARGA UNIFORME REPARTIDA, APOYADA EN DOS CLAROS IGUALES. 18

VIGA CONTINUA APOYADA EN DOS CLAROS IGUALES CON CARGA CONCENTRADA. 37

VIGA CONTINUA DE DOS CLAROS EXTREMOS IGUALES CON VALOR L/2 ,Y UN CLARO CENTRAL IGUAL A "L" , CON UNA CARGA CONCENTRADA AL CENTRO. 55

CONCLUSIONES 78

BIBLIOGRAFIA 79

PROLOGO

Uno de los objetivos principales de éste Libro consiste en proporcionar una alternativa, para el análisis de las estructuras estaticamente indeterminadas o Hiperestáticas,que se aplica a vigas continuas de dos o mas claros.
Se presentan ejercicios resueltos,como en el Libro publicado con anterioridad en la Universidad Autónoma Metropolitana titulado "DEFORMACIONES EN VIGAS ISOSTATICAS E HIPERESTATICAS ", y se aplican los mismos conceptos de Estática y Resistencia de Materiales para la solución de las vigas.

La alternativa propuesta tiene como base,la aplicación de la Ecuación General de la Elástica Desarrollada en Series de Potencias,propuesta por el DR Ballesteros.Con esta ecuaes posible determinar una ecuación particular para cada caso isostático o hiperestático.

Otro de los objetivos de este Texto es el de Apoyar a los alumnos que cursan las materias de Resistencia de Materiales y Estructuras de la Carrera de Arquitectura en la Universidad Autónoma Metropolitana ; paralelamente es un texto que sirve de consulta a profesionistas dedicados al -- Análisis y Diseno de Estructuras, y además puede generar futuras investigaciones

Para dar una mejor calidad en la elaboración de este Libro, investigé sobre programas de cómputo ; personalmente escribí las fórmulas y ecuaciones matemáticas,con el procesador de textos de WORDPERFECT 5.1 y el trazo de las vigas ,diagramas de Cortantes y diagramas de Momentos Flexionantes con el programa PAINTBRUSH DE WINDOWS 3.0

Debo de agradecer al ING. Guillermo García Malo Flores,por la asesoría que me brindó durante la elaboración de la investigación, y también por el material proporcionado para lograr la solución de los ejercicios propuestos en éste y el libro publicado con anterioridad titulado "Deformaciones en Vigas Isostáticas e Hiperestáticas.

ARQ. Carlos García Malo Flores.

INTRODUCCION

De los conceptos de mayor importancia en Resistencia de Materiales, es el que se refiere al estudio de las Deformaciones ,Fuerzas Cortantes, y Momentos Flexionantes en las vigas y marcos de las Estructuras ; Para lograr el diseno de las vigas columnas, losas, zapatas y muros que forman parte del soporte de una estructura Arquitectónica, será necesario evaluar estos conceptos, actualmente llamados Elementos Mecánicos.

Para estudiar el comportamiento de una estructura arquitectónica,será necesario,conocer diferentes factores como :

a) El destino del edificio

b) La localización del terreno

c) Los materiales que se van a utilizar

d) Los reglamentos Vigentes

e) Los métodos de Análisis y Diseno Estructural

Con relación al destino del edificio,es importante considerar las diferentes necesidades del proyecto arquitectonico : Habitacional, Asistencial ,Recreativo, Cultural, Social, con el objeto de tomar en cuenta las Cargas Vivas,y la importancia en relación a un sismo. por ejemplo: los factores de seguridad en un Cine son mayores a los que se aplican a una Casa Habitación.

El terreno en donde se va a construir el edificio constituye un material Estructural por lo

que debera de ser objeto de estudios de Mecánica de Suelos,para determinar sus propiedades de resistencia, y comportamiento sismico. Por ejemplo en un terreno formado por roca lo ideal es disenar una estructura Flexible, y en un terreno Blando, lo más recomendable es disenar una estructura muy rígida.

Esto representaría utilizar mayores o menores cantidades de Acero y de Concreto estructural.

En lo que respecta a los materiales estructurales,es FUNDAMENTAL el conocimiento total de su resistencia,características,y propiedades : ACERO, CONCRETO SIMPLE, CONCRETO CON ACERO, MADERA, MADERA CON ACERO, ALUMINIO, MAMPOSTERIAS, ARCILLAS, TEPETATES, LIMOS, ARENAS, GRAVAS, MORTEROS y otros. Por ejemplo : en un Edificio de varios niveles pueden emplearse diferentes resistencias para el Concreto, mientras que en un edificio de un nivel,es conveniente un solo tipo de Concreto estructural.
En el caso de los materiales no estructurales,deberá de investigarse de que forma pueden ser afectados por los efectos producidos del comportamiento de la estructura ; por ejemplo: el acabado con yeso en muros de tabique que deban resistir fuerzas sísmicas, ó el efecto de las vibraciones en losas de grandes dimensiones con recubrimientos de cemento o yeso.

Los reglamentos Vigentes para cada País, Ciudad, o Región difieren según la experiencia del comportamiento de las construcciones de cada lugar, y deberán de tomarse en cuenta para garantizar que se cumplen con los requisitos de Seguridad Estructural.Por ejemplo: a raíz de los sismos en el mes de Septiembre de 1985 en la Cd de México, se modificó el Reglamento para Construcciones del Distrito Federal y se editaron Las Normas Técnicas Complementarias que tomaron en cuenta muchas de las fallas estructurales en los edificios. Estas Normas se refieren basicamente a :

1 DISENO Y CONSTRUCCION DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO

2 DISENO Y CONSTRUCCION DE ESTRUCTURAS DE ACERO

3 DISENO Y CONSTRUCCION DE ESTRUCTURAS DE MADERA

4 DISENO POR VIENTO

5 DISENO POR SISMO

6 DISENO DE CIMENTACIONES

7 DISENO Y CONSTRUCCION DE ESTRUCTURAS DE MAMPOSTERIA.

Los métodos de Análisis y Diseno Estructural nos van a dar una idea aproximada del comportamiento y la forma que deberá de tener la Estructura. Los métodos mas conocidos para el análisis estructural son:

1) El metodo de las RIGIDECES

2) El de FLECHA PENDIENTE

3) El de KANI

4) El de TAKABEYA

5) DISTRIBUCION DE MOMENTOS O DE CROOS-MORGAN

6) El DE LOS ELEMENTOS FINITOS

7) El PORTAL

8) ING CASTILLO

9) LAS LINEAS DE INFLUENCIA.

En la actualidad los procedimientos de Diseno de Estructuras tienen como base, el comportamiento de los materiales estructurales, verificando sus resistencias en Laboratorios de Ingeniería Estructural ,con pruebas de Tensión, Compresión, Cortante, Flexión, Flexo-Compresión, Dureza, Torsión ,y para diferentes disenos de elementos,como Trabes, Losas, Muros, y Columnas de Concreto Reforzado, Vigas de Acero, Losas de Acero, Columnas de Acero, Vigas, Muros,y Columnas de Madera.

Los métodos de mas uso en la actualidad para diseno de estructuras son: EL ELASTICO , EL PLASTICO, DE RESISTENCIA ULTIMA, DE RESISTENCIA Y SERVICIO, DE FALLA, DE ESFUERZOS PERMISIBLES, METODOS ALTERNATIVOS DE DISENO y otros.

ANTECEDENTES

Para aplicar la Ecuación General de la Elástica a los problemes propuestos,es necesario recordar algunos conceptos Matemáticos y de Resistencia de Materiales
La Ecuación se obtiene a partir de un análisis diferencial de una viga apoyada,con carga uniforme repartida, y con base en un polinomio desarrollado en series de potencias.
A partir del análisis de la viga se obtienen las siguientes conclusiones :

La primera derivada del Momento Flexionante con respecto a la distancia x es igual a la Fueza Cortante

$$V = \frac{dM}{d_x}$$

La segunda derivada del Momento Flexionante con respecto a la distancia x es igual a la carga w

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = -\omega$$

Si se aplican los conceptos del cálculo integral a la misma viga se obtiene :
La primera integración de la carga w es igual a la Fuerza Cortante

$$\int \omega = V$$

La segunda integración de la carga w es igual al Momento Flexionante. La primera integración de la Fuerza Cortante es igual al Momento Flexionante:

$$\iint \omega = M$$

Si continuamos con el proceso , entonces la tercera integración de la carga w es igual a la Pendiente ó Giro Angular de la Elástica :

$$\iiint \omega = \theta$$

y por último la cuarta integración de la carga w es igual a la Flecha Y :

$$\iiiint \omega = Y$$

El polinomio desarrollado en serie de Maclaurin se escribe :

$$P(X) = \frac{P(0)}{1} + \frac{P^{I}(0)}{1!}X + \frac{P^{II}(0)}{2!}X^2 + \frac{P^{III}(0)}{3!}X^3 + \frac{P^{IV}(0)}{4!}X^4 + \frac{P^{V}(0)}{5!}X^5 + ...$$

Del proceso de derivadas sucesivas se resume:

$$Y = f\ (X) \qquad \textit{Ecuacion General de la Elastica}$$

La primera derivada con respecto a X

$$\frac{d_y}{dx} = \theta \qquad \textit{pendiente de la curva}$$

Segunda derivada

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \qquad \textit{ecuacion diferencial de la Elastica}$$

Tercera derivada

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{1}{EI}\frac{dM}{dx} = -\frac{1}{EI}V \qquad \textit{Fuerza Cortante}$$

Cuarta derivada

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{1}{EI}\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{1}{EI}\,\omega \qquad \textit{Distribucion de carga}$$

Finalmente se obtiene por sustitución de los valores anteriores en la ecuación de MACLAURIN ,la Ecuación de la Elástica:

$$Y_{(x)} = Y_0 + \theta_0 X - \frac{M_0}{2EI}X^2 - \frac{V_0}{6EI}X^3 + \frac{\omega_0}{24EI}X^4 + \frac{\omega_0^I}{120EI}X^5 + \frac{\omega_0^n}{n\ EI}X^n + \infty$$

A partir de esta ecuación General,por derivadas sucesivas se obtienen,las ecuaciones particulares de Flecha ,Pendiente, Fuerza Cortante, y Carga,para cada caso .

Es importante indicar que los valores que le van a proporcionar la Resistencia a un elemento estructural son: el Modulo de Elasticidad del material , y el Momento de Inercia.

Por lo tanto EI = RIGIDEZ

E : Módulo de Elasticidad del material

I : Momento de Inercia de la Sección

Otros de los conceptos que se deben de tomar en cuenta, son los tipos de apoyos en las estructuras :

a) APOYO LIBRE

b) APOYO ARTICULADO

c) EMPOTRAMIENTO

El Apoyo Libre permite deslizamiento, sobre la superficie en donde se desplanta,y no es capaz de absorber Momentos. La incógnita para éste tipo de apoyo es su Magnitud o tamano,su dirección es perpendicular a la superficie de deslizamiento .
Cuando el apoyo libre se considera en el extremo de una viga, sus condiciones de origen son las siguientes:

$Y_0 = 0$ ***la Flecha en el origen 0***

$\theta_0 \neq 0$ ***La Pendiente en el origen es diferente de 0***

$M_0 = 0$ ***El Momento Flexionante en el origen es igual a 0***

$V_0 = R$ ***La Fuerza Cortante en el origen es igual a la Reaccion***

La carga w en el origen dependerá de las cargas aplicadas en la viga:

$\omega_0 = 0$ ***La carga en el origen es igual a 0***

ó también la carga w en el origen puede ser igual a w

$\omega_0 = \omega$ ***La carga en el origen es igual a*** ω

El apoyo Articulado,permite giro en el extremo de las vigas o columnas,y no absorbe momento; Se consideran como incógnitas su magnitud y su dirección.
Las condiciones de origen serían las mismas que para el apoyo Libre.

El empotramiento tiene capacidad para absorber Momentos,es idealmente rígido,y tiene como incógnitas la magnitud de su reacción, la dirección de la reacción,y la magnitud del momento de empotramiento.
Las condiciones en el origen cuando se considera este tipo de apoyo son las siguientes :

$Y_0 = 0$ ***La flecha en el origen es igual a***
$\theta_0 = 0$ ***La pendiente en el origen es igual a 0***
$M_0 \neq 0$ ***El momento en el origen es diferente de 0***
$V_0 = R$ ***El Cortante en el origen es igual a la Reaccion***
$\omega_0 \neq 0$ ***La Carga en el origen es diferentede 0***

Para dar solución a los problemas propuestos,de vigas continuas por medio de la Ecuación General,también será necesario considerar las ecuaciones que nos proporciona la ESTATICA :

a) La suma algebráica de los momentos de las fuerzas deberá de ser igual a cero. Se consideran como positivos,los momentos de las fuerzas que giran en sentido contrario a las manecillas del reloj; y negativos los momentos de las fuerzas que giran en el sentido de las manecillas del reloj :

$$\Sigma MF = 0$$

b) La suma algebráica de las fuerzas,con respecto al eje X (horizontal) deberá de ser igual a cero.

$$\Sigma F_x = 0$$

c) La suma algebráica de las fuerzas,con respecto al eje Y (vertical) deberá de ser igual a cero.

$$\Sigma F_y = 0$$

- ECUACION GENERAL DE LA ELASTICA

La ecuacion general de la Elastica desarrollada en series de potencias,se puede aplicar a vigas continuas y Estructuras formadas por Marcos coplanares,para diferentes condiciones de cargas y apoyos.

De acuerdo a las condiciones de frontera y a las de origen,en las vigas y marcos se establecen las condiciones para cada caso.

La Ecuacion general de la Elastica se escribe de la siguiente forma:

$$Y_X=Y_0+\theta_0 X-\frac{M_0}{2EI}X^2-\frac{V_0}{6EI}X^3+\frac{\omega_0}{24EI}X^4+\frac{\omega_0^{I}}{120EI}X^5+\frac{\omega_0^{II}}{720EI}X^6+\frac{\omega_0^{n-4}}{n!EI}X^n$$

Se denomina Ecuacion General de la Elastica,porque intervienen los valores de la FLECHA,la PENDIENTE o GIRO ANGULAR, el MOMENTO FLEXIONANTE,la FUERZA CORTANTE, Y la CARGA UNIFORME REPARTIDA.

La letra E representa el MODULO DE ELASTICIDAD DEL MATERIAL y la letra I representa al MOMENTO DE INERCIA de la seccion.

X : se considera una variable en la Ecuacion,y es una distancia que esta relacionada,con el eje longitudinal de la viga continua,o con el eje longitudinal de una columna para un marco.

La Ecuacion General de la Elastica, representa derivadas sucesivas,de la deformacion Y. por Ejemplo:

La primera derivada del MOMENTO FLEXIONANTE con respecto a la distancia X ,es igual a la FUERZA CORTANTE .

La segunda derivada del MOMENTO FLEXIONANTE con respecto a la distancia X ,es igual a la CARGA UNIFORME REPARTIDA.

La primera integracion de la CARGA,con respecto a la distancia X,es igual a la FUERZA CORTANTE.

La primera integracion del MOMENTO FLEXIONANTE con respecto a la distancia X es igual a la PENDIENTE de la curva elastica.

De lo anterior se resume:

Y_X : ***Y esta en funcion de X***

Y_0 : ***FLECHA en el origen***

θ_0 : ***PENDIENTE en el origen***

M_0 : ***MOMENTO FLEXIONANTE en el origen***

V_0 : ***FUERZA CORTANTE en el origen***

ω_0 : ***CARGA UNIFORME REPARTIDA en el origen***

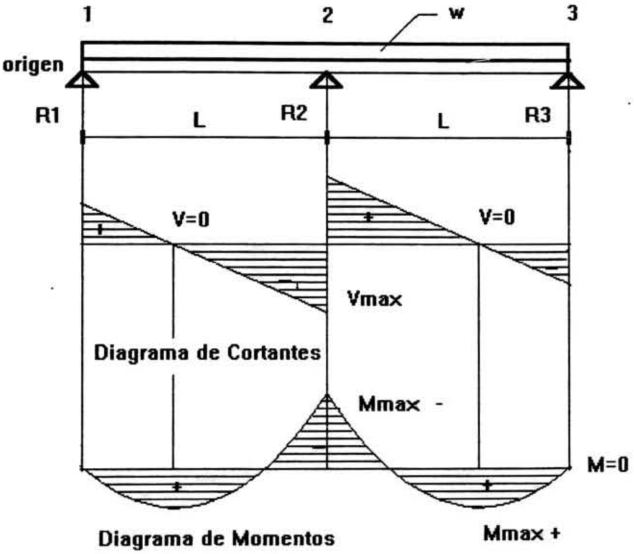
ω_0^I : ***PRIMERA DERIVADA DE*** ω_0

E : ***MODULO DE ELASTICIDAD del material***

I : ***MOMENTO DE INERCIA de la seccion***

2 , 6 , 24 , 120 , 720 , : ***CONSTANTES***

VIGA CONTINUA DE DOS CLAROS IGUALES CON CARGA UNIFORME REPARTIDA



VIGA CONTINUA CON CARGA UNIFORME REPARTIDA,APOYADA EN DOS CLAROS IGUALES.

Primero se determinan las condiciones en el origen,considerando el apoyo izquierdo como origen de la viga :

$$Y_0=0$$
$$\theta_0\neq 0$$
$$M_0=0$$
$$V_0=R_1$$
$$\omega_0=\omega$$
$$\omega_0^I=0$$

y las condiciones de frontera son:

$$0\leq X\leq L$$
$$L\leq X\leq 2L$$

Para la primera condicion de frontera $0\leq X\leq L$ se determina la siguiente ecuacion:

$$Y_X=\theta_0 X-\frac{R_1}{6EI}X^3+\frac{\omega}{24EI}X^4 \qquad \textit{Ecuacion numero} \quad 1$$

Para la segunda condicion de frontera $L \leq X \leq 2L$ se determina la siguiente ecuacion :

$$Y_X = \theta_0 X - \frac{R_1}{6EI}X^3 + \frac{\omega}{24EI}X^4 - \frac{R_2}{6EI}(X-L)^3 \qquad \textit{ecuacion numero} \quad 2$$

Para calcular la reaccion en el apoyo 2 se calcula una suma algebraica de momentos,con respecto al apoyo 3 :

$$\Sigma MF_3 = -R_1(2L) - R_2(L) + \omega(2L)(L) = 0$$
$$R_1(2L) - R_2(L) + 2\omega L^2 = 0$$
$$R_2 = -2R_1 + 2\omega L \qquad \textit{ecuacion numero} \quad 5$$

Sustituimos en la ecuacion numero 1 los valores de las condiciones en el origen :

Para $X=L$ $Y=0$

$$0 = \theta_0 L - \frac{R_1}{6EI}(L)^3 + \frac{\omega}{24EI}(L)^4$$

Despejamos el valor de la Pendiente :

$$\theta_0=\frac{4R_1L^2-\omega L^3}{24EI} \quad \textit{ecuacion numero} \quad 3$$

Sustituimos en la ecuacion numero 2 los valores de las condiciones en el origen:

Para X=2L Y=0

$$0=\theta_0 2L-\frac{R_1}{6EI}(2L)^3+\frac{\omega}{24EI}(2L)^4-\frac{R_2}{6EI}(2L-L)^3$$

$$\theta_0=\frac{8R_1L^2-4\omega L^3+R_2L^2}{12EI} \quad \textit{ecuacion numero} \quad 4$$

Sustituimos la ecuacion numero 5 en la 4 :

$$\theta_0=\frac{8R_1L^2-4\omega L^3-2R_1L^2+2\omega L^3}{12EI} \quad \textit{ecuacion numero} \quad 6$$

Igualamos las ecuaciones 6 y 4 :

$$R_1=\frac{3}{8}\omega L \quad \textit{ecuacion numero} \quad 7$$

Para calcular la reaccion en el apoyo 2 sustituimos la ecuacion 7 en la 5:

$$R_2=-2(\frac{3}{8}\omega L)+2\omega L$$

$$R_2=\frac{10}{8}\omega L \quad \textit{ecuacion numero} \quad 8$$

Para calcular la reaccion en el apoyo 3 se sustituyen las reacciones ya determinadas anteriormente,por suma algebraica de fuerzas verticales :

$$\Sigma F_Y=-2\omega L+R_1+R_2+R_3=0$$

$$R_3 = \frac{3}{8}\omega L \quad \textit{ecuacion numero} \quad 9$$

Para calcular la Pendiente en el origen sustituimos la ecuacion 7 en la 3 :

$$\theta_0 = \frac{4(\frac{3}{8}\omega L)L^2 - \omega L^3}{24EI}$$

$$\theta_0 = \frac{\omega L^3}{48EI} \quad \textit{ecuacion numero} \quad 10$$

Para obtener la ecuacion general de la elastica para la viga continua estudiada, sustituimos los valores calculados de reacciones y pendiente conocidas, en las ecuaciones 1 y 2:
Para la primera condicion de frontera $0 \leq X \leq L$

$$Y_X=\frac{\omega L^3}{48EI}X-\frac{\frac{3}{8}\omega L}{6EI}X^3+\frac{\omega}{24EI}X^4 \quad \textit{ecuacion numero} \quad 11$$

Para la segunda condicion de frontera L≤X≤2L

$$Y_X=\frac{\omega L^3}{48EI}X-\frac{\frac{3}{8}\omega L}{6EI}X^3+\frac{\omega}{24EI}X^4-\frac{\frac{10}{8}\omega L}{6EI}(X-L)^3 \quad \textit{ecuacion numero} \quad 12$$

Con las dos ecuaciones anteriores se obtienen por derivadas,las ecuaciones de la PENDIENTE,MOMENTO,FUERZA CORTANTE, y CARGA .
frontera .
Primero se determinara la ecuacion de la pendiente,derivando la ecuacion numero 11 :para la condicion 0≤X≤L

$$\frac{\theta_X}{EI}=\frac{d_y}{d_x}X=\frac{\omega L^3}{48EI}-\frac{9\omega L}{48}X^2+\frac{4\omega}{24EI}X^3$$

$$=\frac{\omega L^3}{48EI}-\frac{3\omega L}{16EI}X^2+\frac{\omega}{6EI}X^3 \quad \textit{ecuacion numero} \quad 13$$

Para esta ecuacion si X=L ,la pendiente sera = 0

Si derivamos la ecuacion anterior,se obtiene la ecuacion del momento flexionante para la viga continua :

$$-\frac{M_X}{EI}=\frac{d^2y}{d_{x^2}}X=-\frac{6\omega L}{16EI}X+\frac{3\omega}{6EI}X^2$$

$$=-\frac{3\omega L}{8EI}X+\frac{\omega}{2EI}X^2 \quad \textit{ecuacion numero} \quad 14$$

si se deriva la ecuacion anterior se obtiene la ecuacion de la fuerza cortante:

$$-\frac{V_X}{EI}=\frac{d^3Y}{d_{X^3}}X=-\frac{3\omega L}{8EI}+\frac{\omega}{EI}X \quad \textit{ecuacion numero} \quad 15$$

y paradeterminar la ecuacion de la carga se deriva la ecuacion anterior:

$$\frac{\omega_X}{EI}=\frac{d^4Y}{d_{X^4}}X=\frac{\omega}{EI} \qquad \textit{ecuacion numero} \quad 16$$

Por derivadas de la ecuacion numero 12 ,que se relaciona con la segunda condicion de frontera para L ≤ X ≤ 2L se determinan las ecuaciones de la PENDIENTE,EL MOMENTO FLEXIONANTE,FUERZA CORTANTE,Y CARGA:

$$\frac{\theta_X}{EI}=\frac{d_Y}{d_X}X=\frac{\omega L^3}{48EI}-\frac{9\omega L}{48EI}X^2+\frac{4\omega}{24EI}X^3-\frac{30\omega L}{48EI}(X-L)^2$$

$$=\frac{\omega L^3}{48EI}-\frac{3\omega L}{16EI}X^2+\frac{\omega}{6EI}X^3-\frac{5\omega L}{8EI}(X-L)^2 \qquad \textit{ecuacion numero} \quad 17$$

Para calcular la ecuacion del momento se deriva la anterior:

$$-\frac{M_X}{EI}=\frac{d^2y}{d_{X^2}}=-\frac{6\omega L}{16EI}X+\frac{3\omega}{6EI}X^2-\frac{10\omega L}{8EI}(X-L)$$

$$=-\frac{3\omega L}{8EI}X+\frac{\omega}{2EI}X^2-\frac{5\omega L}{4EI}(X-L) \quad \textit{ecuacion numero} \quad 18$$

Si se deriva la la ecuacion anterior,se obtiene la ecuacion de la fuerza cortante:

$$-\frac{V_X}{EI}=\frac{d^3Y}{dx^3}=\frac{-3\omega L}{8EI}+\frac{\omega}{EI}X-\frac{5\omega L}{4EI} \quad \textit{ecuacion numero} \quad 19$$

De la derivada de la ecuacion anterior, se obtiene la ecuacion de la carga

$$\frac{\omega_X}{EI}=\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{\omega}{EI} \quad \textit{ecuacion numero} \quad 20$$

Con las ecuaciones numero 13,14,15,16,17,18,19,y 20 podemos calcular la flecha,la el momento flexionante,la fuerza cortante, para cualquier punto de la viga continua

Por ejemplo para calcular el valor del momento flexionante en el apoyo intermedio, sustituimos en la ecuacion numero 18 el valor de X por l :
PARA X=L

$$-\frac{M_L}{EI}=-\frac{3\omega L}{8EI}(L)+\frac{\omega}{2EI}(L)^2-\frac{5\omega L}{4EI}(L-L)$$

$$-\frac{M_L}{EI}=\frac{-3\omega L^2+4\omega L^2}{8EI}$$

$$M=-\frac{\omega L^2}{8}$$

Como ejemplo se puede comprobar el valor de la fuerza cortante en el apoyo central,si se sustituye X=L en la ecuacion numero 19:

$$-\frac{V}{EI}=-\frac{3\omega L}{8EI}+\frac{\omega}{EI}(L)-\frac{5\omega L}{4EI}$$

$$-\frac{V}{EI}=\frac{-3\omega L+8\omega L-10\omega L}{8EI}$$

$$V=\frac{5}{8}\omega L$$

Como otro ejemplo de aplicacion de las ecuaciones obtenidas anteriormente, se puede calcular el valor del momento flexionante cuando X=2L , de la ecuacion numero 18:

$$-M_{2L}=-\frac{3\omega L}{8EI}(2L)+\frac{\omega}{2EI}(2L)^2-\frac{5\omega L}{4EI}(2L-L)$$

$$=\frac{-6\omega L^2+16\omega L^2-10\omega L^2}{8EI}$$

$$M=0$$

Para calcular el valor del momento flexionante maximo positivo,es necesario conocer, a que distancia se produce.

Para $0 \leq X \leq L$ calculamos el valor de X ,de la ecuacion de la fuerza cortante Vx,la igualamos a cero y despejamos X .

De la ecuacion numero 15 :

$$-\frac{V_X}{EI}=0=-\frac{3\omega L}{8EI}+\frac{\omega}{EI}X$$

$$\frac{\omega X}{EI}=\frac{3\omega L}{8EI}$$

De la ecuacion anterior se despeja el valor de X

$$X=\frac{3}{8}\omega L$$

En la ecuacion numero 19 ,se determina el valor de X para la segunda condicion de frontera : L≤X≤2L

$$-\frac{V_X}{EI}=0=-\frac{3\omega L}{8EI}+\frac{\omega}{EI}X-\frac{5\omega L}{4EI}$$

De la ecuacion anterior, se despeja el valor de X :

$$\frac{\omega X}{EI}=\frac{3\omega L}{8EI}+\frac{5\omega L}{4EI}$$

Por lo tanto :

$$X=\frac{3}{8}L+\frac{5}{4}L$$

$$X=\frac{13}{8}L$$

Una vez calculado el valor de X para las dos condiciones de frontera se determina el valor del momento flexionante .

Para la primera condición de frontera , se sustituye en la ecuación número 14 el primer valor de X :

$$-\frac{M_X}{EI}=-\frac{3\omega L}{8EI}X+\frac{\omega}{2EI}X^2$$

$$=-\frac{3\omega L(\frac{3L}{8})}{8EI}+\frac{\omega(\frac{3L}{8})^2}{2EI}$$

$$=-\frac{9\omega L^2}{64EI}+\frac{9\omega L^2}{128EI}$$

$$M=\frac{9\omega L^2}{128}$$

Para calcular el momento flexionante positivo máximo, para X=13L/8. sustituimos en la ecuación número 18. Para la condición de frontera L≤X≤2L :

$$-\frac{M_x}{EI}=-\frac{3\omega L}{8EI}\left(\frac{13L}{8}\right)+\frac{\omega}{2EI}\left(\frac{13L}{8}\right)^2-\frac{5\omega L}{4EI}\left(\frac{13L}{8}-L\right)$$

2894812

242182

$$-\frac{M_X}{EI}=-\frac{39\omega L^2}{64EI}+\frac{169\omega L^2}{128EI}-\frac{25\omega L^2}{32EI}$$

$$-\frac{M_X}{EI}=-\frac{9\omega L^2}{128EI}$$

$$M=\frac{9\omega L^2}{128}$$

Para calcular la flecha cuando X=L/2 sustituimos en la ecuación número 11 :

$$Y=\frac{\omega L^3}{48EI}(\frac{L}{2})-\frac{\omega L}{48EI}(\frac{L}{2})^3+\frac{\omega}{24EI}(\frac{L}{2})^4$$

$$=\frac{\omega L^4}{96EI}-\frac{\omega L^4}{128EI}+\frac{\omega L^4}{384EI}$$

$$Y=\frac{\omega L^4}{192EI}$$

Para calcular la flecha cuando X=3L/8, sustituimos en la ecuación número 11:

$$Y=\frac{\omega L^3}{48EI}(\frac{3L}{8})-\frac{\omega L}{16EI}(\frac{3L}{8})^3+\frac{\omega}{24EI}(\frac{3L}{8})L^4$$

$$=\frac{3\omega L^4}{384EI}-\frac{27\omega L^4}{8192EI}+\frac{81\omega L^4}{98304EI}$$

$$Y=\frac{525\omega L^4}{98304EI}$$

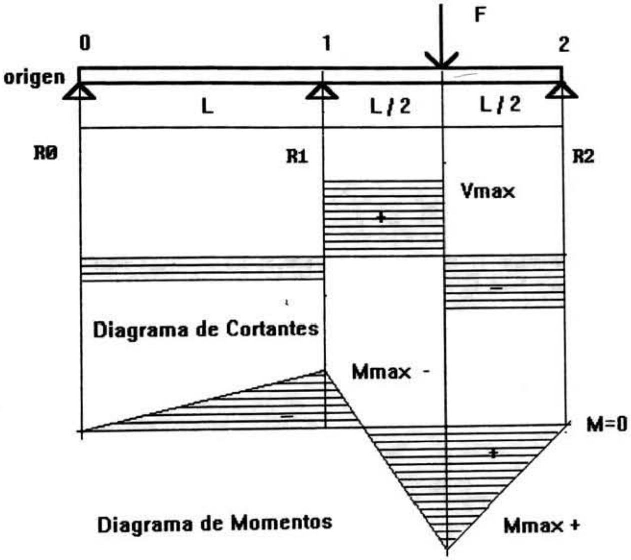
La flecha cuando X=13L/8 ,se obtiene con la ecuación número 12 :

$$Y_{(\frac{13L}{8})}=\frac{\omega L^3}{48EI}(\frac{13L}{8})-\frac{\omega L}{16EI}(\frac{13L}{8})^3+\frac{\omega}{24EI}(\frac{13L}{8})^4-\frac{10\omega L}{48EI}(\frac{13L}{8}-L)^3$$

La ecuación anterior se simplifica y se obtiene la fórmula para la flecha con respecto a X :

$$Y_{(\frac{13L}{8})}=\frac{525\omega L^4}{98304EI}$$

VIGA CONTINUA DE DOS CLAROS IGUALES,CON CARGA CONCENTRADA EN EL CENTRO DE UN CLARO.



VIGA CONTINUA APOYADA EN DOS CLAROS IGUALES CON CARGA CONCENTRADA.

Se considera como el origen de la viga el apoyo izquierdo y se determinan las condiciones de : La FLECHA,PENDIENTE,MOMENTO FLEXIONANTE,FUERZA CORTANTE y CARGA UNIFORME REPARTIDA

$Y_0=0$: ***La FLECHA en el origen es igual a cero***
$\theta_0\neq 0$: ***La PENDIENTE de la elastica en el origen es diferente de cero***
$V_0=-R_0$: ***La FUERZA CORTANTE en el origen es igual a la Reaccion***
$M_0=0$: ***El MOMENTO FLEXIONANTE en el origen es igual a cero***
$\omega_0=0$: ***La CARGA UNIFORME REPARTIDA en el origen es igual a cero***

Se establecen para este caso 3 condiciones de frontera:

$0\leq X\leq L$: Para valores de X mayores o iguales a cero, y menores o iguales a L

$L\leq X\leq 3L/2$: Para valores de X mayores o iguales a L, y menores o iguales a 3L/2

$3L/2\leq X\leq 2L$: Para valores de X mayores o iguales a 3L/2 ,y menores o iguales a 2L.

Para la primera condicion $0\leq X\leq L$ se determina la siguiente ecuacion :

$$Y_X=\theta_0 X-\frac{-R_0}{6EI}X^3 \qquad \textit{Ecuacion numero 1}$$

Para la segunda condicion $L \leq X \leq 3L/2$ se determina la siguiente ecuacion :

$$Y_X = \theta_0 X - \frac{-R_0}{6EI} X^3 - \frac{R_1}{6EI}(X-L)^3 \qquad \textit{Ecuacion numero 2}$$

Para la tercera condicion de frontera $3L/2 \leq X \leq 2L$ se obtiene la siguiente ecuacion:

$$Y_X = \theta_0 X - \frac{-R_0}{6EI}(X-L)^3 - \frac{-F}{6EI}(X-\frac{3L}{2})^3 \qquad \textit{Ecuacion numero 3}$$

De las tres ecuaciones anteriores se sustituye en la primera :
Para $X=L$ $\quad Y=0$

$$0 = \theta_0 L + \frac{R_0}{6EI}(L^3)$$

$$\theta_0 = -\frac{R_0 L^2}{6EI} \qquad \textit{Ecuacion numero 4}$$

De la tercera condicion de frontera se sustituye para $X=2L$ $\;Y=0$ y se obtiene:

$$0=\theta_0(2L)+\frac{R_0}{6EI}(2L)^3-\frac{R_1}{6EI}(2L-L)^3+\frac{F}{6EI}(2L-\frac{3L}{2})^3$$

$$0=\theta_0(2L)+\frac{8R_0L^3}{6EI}-\frac{R_1L^3}{6EI}+\frac{FL^3}{48EI}$$

$$\theta_0=-\frac{4R_0L^2}{6EI}+\frac{R_1L^2}{12EI}-\frac{FL^2}{96EI}$$

$$\theta_0=-\frac{64R_0L^2+8R_1L^2-FL^2}{96EI}$$ ***Ecuacion numero 5***

Las ecuaciones planteadas 4 y 5 corresponden a la primera y tercera condicion de frontera y relacionan al valor de la pendiente,en el origen. En estas ecuaciones se desconocen :

$$R_0 \quad y \quad R_1$$

De ESTATICA se aplica una SUMA ALGEBRAICA DE MOMETOS, condicion de equilibrio,para determinar las reacciones en los apoyos :

$$\Sigma MF_2 = R_0(2L) - R_1(L) + F(\frac{L}{2}) = 0$$

$$R_0 = \frac{2R_1 - F}{4} \qquad \textit{Ecuacion numero 6}$$

$$R_1 = \frac{4R_0 + F}{2} \qquad \textit{Ecuacion numero 7}$$

Para el calculo de las ecuaciones numeros 6 y 7 se considero la siguiente convencion de signos : Momentos positivos en sentido contrario a las manecillas del reloj, y Momentos negativos en sentido a favor de las manecillas del reloj.

De las ecuaciones anteriores se sustituye la ecuacion numero 7 en la 5 :

$$\theta_0 = \frac{-64R_0L^2 + 8[\frac{4R_0 + F}{2}]L^2 - FL^2}{96EI}$$

$$\theta_0=\frac{-64R_0L^2+16R_0L^2+4FL^2-FL^2}{96EI}$$

$$\theta_0=\frac{-48R_0L^2+3FL^2}{96EI}\qquad \textit{Ecuacion numero 8}$$

De las ecuaciones 4 y 8 se obtienen la PENDIENTE en el origen y las REACCIONES .

De la ecuacio numero 4 se obtiene:

$$6EI\theta_0=-R_0L^2\qquad \textit{Ecuacion numero 4`}$$

y de la ecuacion numero 8 se obtiene :

$$96EI\theta_0=-48R_0L^2+3FL^2\qquad \textit{Ecuacion numero 8`}$$

Las ecuaciones 4' y 8' se resuelven como un sistema de ecuaciones simultaneas:

$$\begin{aligned}-\ R_0L^2-6\ EI\theta_0&=0\\ -48R_0L^2-96EI\theta_0&=-3FL^2\end{aligned}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones, en este caso, se propone el metodo de matrices:

$$R_0=\begin{bmatrix} 0 & -6EI \\ -3FL^2 & -96EI \\ -L^2 & -6EI \\ -48L^2 & -96EI \end{bmatrix}$$

$$R_0=\frac{0-18FL^2EI}{96L^2EI-288L^2EI}$$

$$R_0=\frac{-18FL^2EI}{-192L^2EI}=0.09375F$$

$$R_0=\frac{3}{32}F \qquad \textit{Ecuacion numero 9}$$

Para calcular la PENDIENTE en el origen:

$$\theta_0 = \frac{\begin{vmatrix} -L^2 & 0 \\ -48L^2 & -3FL^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -L^2 & -6EI \\ -48L^2 & -96EI \end{vmatrix}}$$

$$\theta_0 = \frac{3FL^4 + 0}{96EIL^2 - 288EIL^2}$$

$$\theta_0 = \frac{3FL^4}{-192EIL^2}$$

$$\theta_0 = -\frac{FL^2}{64EI} \qquad \textit{Ecuacion numero } 10$$

Se sustituye la ecuacion numero 9 en la 7 ,para determinar la reaccion en el apoyo 1 :

$$R_1=\frac{4(\frac{3F}{32})+F}{32}$$

$$R_1=\frac{11F}{16}$$

La reaccion en el apoyo 2 se determina por ESTATICA aplicando una suma algebraica de fuerzas :

$$\Sigma F=-R_0+R_1-F+R_2=0$$

$$=-\frac{3F}{32}+\frac{11F}{16}-F+R_2=0$$

$$R_2=\frac{13F}{32} \qquad \textit{ecuacion numero } 12$$

Sustituimos en las ecuaciones 1 , 2 , 3 los valores de :

$$\theta_0 \quad R_0 \quad R_1$$

En la ecuación 1 ,para $0 \leq X \leq L$:

$$Y_X = -\frac{FL^2}{64EI}X + \frac{3F}{192EI}X^3 \quad \textit{Ecuacion numero } 14$$

Si se deriva la ecuación anterior con respecto a x se obtienen,las ecuaciones de Pendiente Momento,y Fuerza Cortante:

$$\theta_{(X)} = \frac{dy}{dx} = -\frac{FL^2}{64EI} + \frac{3F}{64EI}X^2 \quad \textit{Ecuacion numero } 14_a$$

$$-\frac{M_X}{EI} = \frac{d^2y}{d_X^2} = \frac{6F_X}{64EI}$$

$$M_X = \frac{3F}{32}X \quad \textit{Ecuacion numero } 14_b$$

$$-\frac{V_X}{EI}=\frac{d^3y}{d_X^3}$$

$$V_X=\frac{3}{32}F \qquad \textit{Ecuacion numero} \quad 14_c$$

En la ecuación número 2 ,para L≤X≤3L/2 :

$$Y_X=-\frac{FL^2}{64EI}X+\frac{3F}{192EI}X^3-\frac{\frac{11F}{16}}{6EI}(X-L)^3$$

$$Y_X=-\frac{FL^2}{64EI}X+\frac{3F}{192EI}X^3-\frac{11F}{96EI}(X-L)^3 \qquad \textit{ecuacion numero } 15$$

simplificando la ecuación anterior se obtiene la ecuación de la elástica para L≤X≤3L/2:

Si se deriva la ecuación anterior, se obtiene la ecuación de la pendiente:

simplificando:

$$\theta_X=\frac{d_Y}{d_X}=-\frac{FL^2}{64EI}+\frac{9F}{192EI}X^2-\frac{33F}{96EI}(X-L)^2$$

$$\theta=-\frac{FL^2}{64EI}+\frac{3F}{64EI}X^2-\frac{11F}{32EI}(X-L)^2 \qquad \textit{ecuacion numero 15a}$$

La ecuación anterior se aplica para la condición $L \leq X \leq 3L/2$
Por derivada de la ecuación anterior ,se obtiene:

$$-\frac{M_X}{EI}=\frac{d^2y}{d_X^2}=\frac{6F_X}{64EI}-\frac{22}{32EI}(X-L)$$

Simplificando se obtiene:

$$\frac{M_X}{EI}=\frac{3F}{32EI}X-\frac{11F}{16EI}(X-L) \qquad \textit{ecuacion numero 15b}$$

Por derivada de la ecuación anterior se obtiene,la de Fuerza Cortante:

$$-\frac{V_x}{EI}=\frac{d^3y}{d_x^3}=\frac{3F}{32EI}-\frac{11F}{16EI}$$

simplificando,se obtiene:

$$V_x=\frac{19F}{32}$$ ***ecuacion numero 15c***

Si se deriva ésta ecuación se obtiene:

$$\frac{d^4y}{d_x^4}=0$$

Para la tercera condición de frontera :
$3L/2\leq X\leq 2L$

de la ecuación de la curva elástica :

2894812

$$Y_X=-\frac{FL^2}{64EI}X+\frac{3F}{192EI}X^3-\frac{11F}{96EI}(X-L)^3+\frac{F}{6EI}(X-\frac{3}{2}L)^3$$ *ecuacion numero* 16

Para obtener de nuevo las ecuaciones de la PENDIENTE,MOMENTO FLEXIONANTE,FUERZA CORTANTE Y CARGA se deriva la ecuación número 16 con respecto a X

$$\theta_X=\frac{d_Y}{d_X}=-\frac{FL^2}{64EI}+\frac{9F}{192EI}X^2-\frac{33F}{96EI}(X-L)^2+\frac{3F}{6EI}(X-\frac{3}{2}L)^2$$

Simplificando se obtiene,la ecuación de la pendiente para cualquier distancia X

$$\theta_X=-\frac{FL^2}{64EI}+\frac{3F}{64EI}X^2-\frac{11F}{32EI}(X-L)^2+\frac{F}{2EI}(X-\frac{3}{2}L)^2$$ *ecuacion numero 16a*

Si se deriva esta ecuación se obtiene:

$$-\frac{M_X}{EI}=\frac{d^2y}{d_X^{\,2}}=\frac{6F}{64EI}X-\frac{22F}{32EI}(X-L)+\frac{2F}{2EI}(X-\frac{3}{2}L)$$

$$-\frac{M_X}{EI}=\frac{3F}{32EI}X-\frac{11F}{16EI}(X-L)+\frac{F}{EI}(X-\frac{3}{2}L)$$

Por lo tanto :

$$M_X=\frac{3F}{32}X-\frac{11F}{16}(X-L)+F(X-\frac{3}{2}L)$$ ***ecuacion numero 16b***

Si se deriva la ecuación anterior se obtiene la ecuación de la Fuerza Cortante en X:

$$-\frac{V_X}{EI}=\frac{d^3y}{d_X^{\,3}}=\frac{3F}{32}-\frac{11F}{16}+F$$

Por lo tanto:

$$V_X=\frac{13}{32}F$$ ***ecuacion numero 16c***

Con las ecuaciones anteriores,podemos calcular el valor de la PENDIENTE, EL MOMENTO FLEXIONANTE, Y LA FUERZA CORTANTE, para cualquier distancia de la viga continua.

Por ejemplo si se desea calcular el valor del MOMENTO FLEXIONANTE en el apoyo intermedio :

De la ecuación 14b

$$M_X = \frac{3}{32} F_X$$

se sustituye el valor de X=L en la ecuación :

$$M_L = \frac{3}{32} FL$$

Si se quiere calcular el MOMENTO FLEXIONANTE para X=2L ,empleamos la ecuación

16b

$$M_{2L} = \frac{3F}{32}(2L) - \frac{11F}{16}(2L-L) + F(2L - \frac{3}{2}L)$$

simplificando :

$$M_{2L}=\frac{6F}{32}L-\frac{11F}{16}L+\frac{F}{2}L$$

$$M_{2L}=0$$

Si se desaa saber el valor de la Pendiente de la elástica en el apoyo 2 empleamos la ecuación número 16a.
Para X=2L :

$$\theta_{2L}=-\frac{FL^2}{64EI}+\frac{3F}{64EI}(2L)^2-\frac{11F}{32EI}(2L-L)^2+\frac{F}{2EI}(2L-\frac{3}{2}L)^2$$

Simplificando :

$$\theta_{2L}=-\frac{FL^2}{64EI}+\frac{12FL^2}{64EI}-\frac{11FL^2}{32EI}+\frac{FL^2}{64EI}$$

$$\theta_{2L} = -\frac{3FL^2}{64EI}$$ ***Pendiente en el apoyo 2***

VIGA CONTINUA DE DOS CLAROS EXTREMOS IGUALES L / 2 Y UN CLARO CENTRAL L CON UNA CARGA CONCENTRADA AL CENTRO.

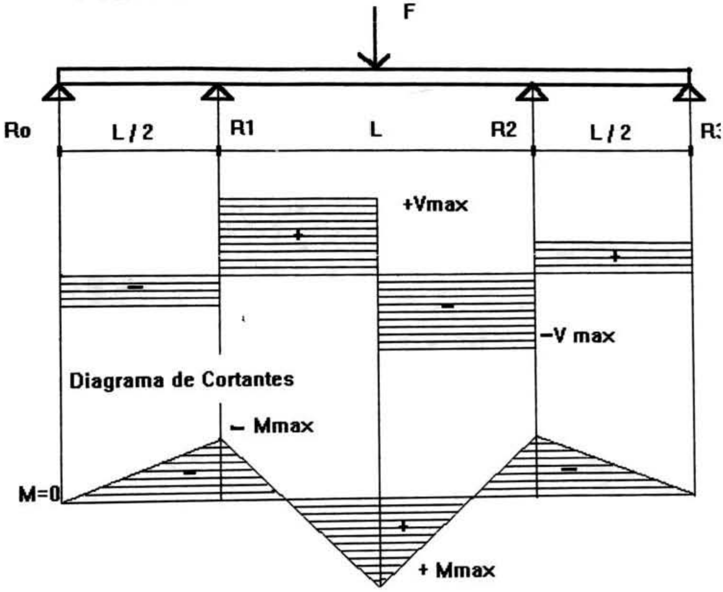


Diagrama de Momentos

VIGA CONTINUA DE DOS CLAROS EXTREMOS IGUALES CON VALOR L/2 , Y UN CLARO CENTRAL IGUAL A "L", CON UNA CARGA CONCENTRADA AL CENTRO.

Para esta viga las condiciones en el origen que se consideran en el apoyo 0 son las siguientes:

$Y_0 = 0$ *La flecha en el origen es igual a cero*

$\theta_0 \neq 0$ *La pendiente es diferente de cero*

$M_0 = 0$ *El momento flexionante es igual a cero*

$V_0 = -R_0$ *La fuerza cortante es igual a la reaccion*

$\omega_0 = 0$ *La carga uniforme repartida es igual a cero*

Para esta viga se consideran 4 condiciones de frontera:

para $0 \leq X \leq L/2$: x es mayor o igual a cero, x es menor o igual a L/2.

para $L/2 \leq X \leq L$: x es mayor o igual a L/2, x es menor o igual a L.

para $L \leq X \leq 3L/2$: x es mayor o igual a L , x es menor o igual a 3L/2.

para $3L/2 \leq X \leq 2L$: x es mayor o igual a 3L/2, x es menor o igual a 2L

Para la primera condición de frontera $0 \leq X \leq L/2$ se determina la siguiente ecuación:

$$Y_{(x)} = \theta_0 x - \frac{-R_0}{6EI} x^3 \qquad \textit{ecuacion numero} \quad 1$$

Para la segunda condición de frontera $L/2 \leq X \leq L$ se determina:

$$Y(x) = \theta_0 x - \frac{-R_0}{6EI} x^3 - \frac{R_1}{6EI}(x - \frac{L}{2})^3 \qquad \textit{ecuacion numero 2}$$

Para la tercera condición de frontera $L \leq X \leq 3L/2$ se determina:

$$Y_{(x)} = \theta_0 x - \frac{-R_0}{6EI} x^3 - \frac{R_1}{6EI}(x - \frac{L}{2})^3 - \frac{-F}{6EI}(x - L)^3 \qquad \textit{ecuacion numero 3}$$

Para la cuarta condición de frontera $3L/2 \leq X \leq 2L$ se determina:

$$Y_{(x)}=\theta_0 x-\frac{-R_0}{6EI}x^3-\frac{R_1}{6EI}(x-\frac{L}{2})^3+\frac{F}{6EI}(x-L)^3-\frac{R_2}{6EI}(x-\frac{3L}{2})^3$$ *ecuacion numero 4*

Estas ecuaciones representan la ecuación general de la elástica para cada condición de frontera,y están en función de la rigidez y del momento de inercia.

Para resolver el problema ,es necesario emplear las ecuaciones que nos proporciona la Estática.
Por suma algebraica de momentos de las fuerzas y las reacciones con respecto al apoyo 3,y considerando momentos positivos, si giran en sentido contrario a las manecillas del reloj, y momentos negativos si giran en sentido a favor :

$$\Sigma MF_3 = R_0(2L) - R_1(\frac{3L}{2}) + F(L) - R_2(\frac{L}{2}) = 0$$

Para este caso las reacciones de los apoyos extremos,se consideran negativas según la deformación de la curva elástica ; y por lo tanto el momento en la suma es de signo positivo.
De esta suma algebraica de momentos se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$R_0 = \frac{R_1(\frac{3L}{2}) - FL + R_2(\frac{L}{2})}{2L}$$

$$R_0 = \frac{3R_1 - 2F + R_2}{4}$$ *ecuacion numero* 5

$$R_1 = \frac{R_0(2L) + FL - R_2(\frac{L}{2})}{(\frac{3L}{2})}$$

$$R_1 = \frac{4R_0 + 2F - R_2}{3}$$ *ecuacion numero* 6

$$R_2 = \frac{R_0(2L) - R_1(\frac{3L}{2}) + FL}{(\frac{L}{2})}$$

$$R_2 = 4R_0 - 3R_1 + 2F$$ *ecuacion numero* 7

De las ecuaciones 1 , 2 , 3 , y 4 se determinan las ecuaciones de la pendiente en función de las condiciones de frontera :

de la ecuación 1 para X = L/2 por lo tanto Y = 0

$$0 = \theta_0\left(\frac{L}{2}\right) + \frac{R_0}{6EI}\left(\frac{L}{2}\right)^3$$

$$\Theta_0 = -\frac{\frac{R_0L^3}{48EI}}{\frac{L}{2}} = -\frac{2R_0L^3}{48EIL} =$$

$$\theta_0 = -\frac{R_0L^2}{24EI} \qquad \textit{ecuacion numero} \qquad 8$$

en la ecuación 3 para X = 3L/2 por lo tanto Y = 0 :

$$0 = \theta_0\left(\frac{3L}{2}\right) - \frac{R_0}{6EI}\left(\frac{3L}{2}\right)^3 - \frac{R_1}{6EI}\left(\frac{3L}{2} - \frac{L}{2}\right)^3 + \frac{F}{6EI}\left(\frac{3L}{2} - L\right)^3$$

$$0 = \theta_0\left(\frac{3L}{2}\right) - \frac{27R_0L^3}{48EI} - \frac{R_1L^3}{6EI} + \frac{FL^3}{48EI}$$

$$\theta_0 = \frac{-\frac{9R_0L^3}{16EI} + \frac{R_1L^3}{6EI} - \frac{FL^3}{48EI}}{\left(\frac{3L}{2}\right)}$$

$$\theta_0 = -\frac{18R_0L^3}{48EIL} + \frac{2R_1L^3}{18EIL} - \frac{2FL^3}{144EIL}$$

$$\theta_0 = -\frac{3R_0L^2}{8EI} + \frac{R_1L^2}{9EI} - \frac{FL^2}{72EI}$$

$$\theta_0 = \frac{-27R_0L^2 + 8R_1L^2 - FL^2}{72EI} \qquad \textit{ecuacion numero} \quad 9$$

en la ecuación 4 para X = 2L por lo tanto Y=0

$$0 = \theta_0(2L) + \frac{R_0}{6EI}(2L)^3 - \frac{R_1}{6EI}(2L - \frac{L}{2})^3 + \frac{F}{6EI}(2L-L)^3 - \frac{R_2}{6EI}(2L - \frac{3L}{2})^3$$

$$0 = \theta_0\ (2L) + \frac{8R_0L^3}{6EI} - \frac{27R_1L^3}{48EI} + \frac{FL^3}{6EI} - \frac{R_2L^3}{48EI}$$

$$\theta_0 = -\frac{8R_0L^2}{12EI} + \frac{27R_1L^3}{96EIL} - \frac{FL^3}{12EIL} + \frac{R_2L^3}{96EIL}$$

$$\theta_0 = \frac{-64R_0L^2 + 27R_1L^2 - 8FL^2 + R_2L^2}{96EI} \qquad \textit{ecuacion numero} \quad 10$$

Con las ecuaciones obtenidas, se sustituye la ecuación número 7 en la 10 :

$$\theta_0 + \frac{-64R_0L^2 + 27R_1L^2 - 8FL^2 + [4R_0 - 3R_1 + 2F]\,L^2}{96EI}$$

$$\theta_0 = \frac{-64R_0L^2 + 27R_1L^2 - 8FL^2 + 4R_0L^2 - 3R_1L^2 + 2FL^2}{96EI}$$

$$\theta_0 = \frac{-60R_0L^2 + 24R_1L^2 - 6FL^2}{96EI} \qquad \textit{ecuacion numero} \quad 11$$

Con las ecuaciones 8, 9, y 11 obtenemos un sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas,que se pueden calcular por Determinantes :

$$
\begin{aligned}
24\,EI\,\theta_0 &= -R_0L^2 \\
72\,EI\,\theta_0 &= -27R_0L^2 + 8R_1L^2 - FL^2 \\
96\,EI\,\theta_0 &= -60R_0L^2 + 24R_1L^2 - 6FL^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-R_0L^2 + 0 - 24\,EI\,\theta_0 &= 0 \\
-27\,R_0L^2 + 8R_1L^2 - 72\,EI\,\theta_0 &= FL^2 \\
-60\,R_0L^2 + 24R_1L^2 - 96\,EI\,\theta_0 &= 6FL^2
\end{aligned}
$$

Las incógnitas de este sistema de ecuaciones son:

$$R_0 \qquad R_1 \qquad \theta_0$$

por lo tanto :

$$\begin{array}{llll} -L^2 & 0 & -24\,EI & = 0 \\ -27L^2 & 8L^2 & -72\,EI & = FL^2 \\ -60L^2 & 24L^2 & -96\,EI & = 6FL^2 \end{array}$$

$$R_0 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -24\,EI \\ FL^2 & 8L^2 & -72\,EI \\ 6FL^2 & 24L^2 & -96\,EI \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -L^2 & 0 & -24\,EI \\ -27L^2 & 8L^2 & -72\,EI \\ -60L^2 & 24L^2 & -96\,EI \end{bmatrix}}$$

$$R_0 = \frac{-576\,FL^4EI + 1152\,FL^4EI}{768\,L^4EI + 15{,}552\,L^4EI - 11{,}520\,L^4EI - 1728\,L^4EI}$$

$$R_0 = \frac{576\,FL^4EI}{3{,}072\,L^4\,EI}$$

$$R_0 = 0.1875\ F$$

$$R_0 = \frac{3}{16} F$$

Para calcular la reacción R1 se aplica el mismo procedimiento por Determinantes:

$$R_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\ L^2 & 0 & -24EI \\ -27L^2 & FL^2 & -72EI \\ -60L^2 & 6FL^2 & -96EI \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\ L^2 & 0 & -24EI \\ -27L^2 & 8\ L^2 & -72EI \\ -60L^2 & 24L^2 & -96EI \end{vmatrix}}$$

$$R_1 = \frac{96\ FL^4\ EI + 3{,}888\ FL^4\ EI - 1{,}440\ FL^4\ EI - 432\ FL^4\ EI}{3{,}072L^4\ EI}$$

$$R_1 = \frac{2{,}112\ FL^4\ EI}{3{,}072\ L^4 EI} = 0.6875\ F$$

$$R_1 = \frac{11}{16}F$$

El giro angular de la elástica en el origen, se obtiene por determinantes :

$$\theta_0 = \frac{\begin{bmatrix} -\ L^2 & 0 & 0 \\ -27L^2 & 8\ L^2 & FL^2 \\ -60L^2 & 24L^2 & 6FL^2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -\ L^2 & 0 & -24EI \\ -27L^2 & 8L^2 & -72EI \\ -60L^2 & 24L^2 & -96EI \end{bmatrix}}$$

$$\theta_0 = \frac{-\ 48\ FL^6\ +\ 24\ FL^6}{3{,}072\ L^2\ EI}$$

$$\theta_0 = -\frac{FL^2}{128\ EI}$$

Con los resultados anteriores ,se determinan las reacciones :

$$R_2 \quad y \quad R_3$$

en la ecuación número 7 se sustituyen las reacciones ya calculadas :

$$R_2 = 4\ (\frac{3}{16}F\ ) - 3\ (\frac{11}{16}F\ ) + 2F$$

$$R_2 = \frac{11}{16}\ F$$

Por suma algebraica de fuerzas se obtiene R 3 :

$$\Sigma\ F = -\ (\frac{3}{16}F\ ) + (\frac{11}{16}F\ ) - F + (\frac{11}{16}F\ ) - R_3 = 0$$

$$R_3 = -\frac{3}{16}F + \frac{11}{16}F - F + \frac{11}{16}F$$

$$R_3 = \frac{3}{16}F$$

En resumen se determinaron los valores de las reacciones y del giro angular en el origen de la viga :

$$R_0 = \frac{3}{16}F \qquad R_1 = \frac{11}{16}F \qquad R_2 = \frac{11}{16}F \qquad R_3 = \frac{3}{16}F$$

$$\theta_0 = -\frac{FL^2}{128EI}$$

Con los resultados obtenidos sustituimos los valores en las ecuaciones 1 2 3 y 4 ,para determinar las ecuaciones de la elástica para cada condición de frontera :

En 1 para $0 \leq X \leq L/2$

$$Y_{(x)} = -\frac{FL^2}{128EI}X + \frac{\frac{3}{16}F}{6EI}X^3$$

$$Y_{(x)} = -\frac{FL^2}{128EI}X + \frac{3F}{96EI}X^3$$

Si se deriva ésta ecuación con respecto a X se obtienen las ecuaciones de la Pendiente o giro angular ,Momento Flexionante, y Fuerza Cortante, para ésta condición de frontera :

$$\theta_X = \frac{dy}{dx} = -\frac{FL^2}{128EI} + \frac{9}{96EI}X^2$$

$$\theta_X = -\frac{FL^2}{128EI} + \frac{3F}{32EI}X^2$$

Si se deriva la ecuación anterior con respecto a X se obtiene la ecuación del Momento Flexionante :

$$- \frac{M_X}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6F}{32EI}X$$

$$- M_X = \frac{3F}{16}X$$

La derivada de la ecuación anterior determina la ecuación de la Fuerza Cortante :

$$-\frac{V_X}{EI} = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3}{16}F$$

En la ecuación 2 para $L/2 \leq X \leq L$ se determinan las ecuaciones correspondientes de la Elástica por derivadas sucesivas.
Con los valores calculados de Reacciones y Pendiente en el origen de la viga se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$Y_{(x)} = \frac{-FL^2}{128EI}X + - \frac{-\frac{3}{16}F}{6EI}X^3 - \frac{\frac{11}{16}F}{6EI}(X - \frac{L}{2})^3$$

$$Y_{(x)} = \frac{-FL^2}{128EI}X + \frac{F}{32EI}X^3 - \frac{11F}{96EI}(X - \frac{L}{2})^3$$

La ecuación anterior representa la Ecuación de la Curva Elástica para la segunda condición de frontera.
Por derivadas se obtiene la ecuación de la Pendiente :

$$\theta_x = \frac{d_y}{d_x} = \frac{-FL^2}{128EI} + \frac{3F}{32EI}X^2 - \frac{33F}{96EI}(X - \frac{L}{2})^3$$

$$\theta_x = \frac{-FL^2}{128EI} + \frac{3F}{32EI}X^2 - \frac{11F}{32EI}(X - \frac{L}{2})^2$$

La ecuación anterior se deriva y se obtiene la del Momento Flexionante :

$$-\frac{M_x}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6F_x}{32EI} - \frac{22F}{32EI}(X - \frac{L}{2})$$

$$= \frac{3F_X}{16EI} - \frac{11F}{16EI}(X - \frac{L}{2})$$

$$- M_X = \frac{3F_X}{16} - \frac{11F}{16}(X - \frac{L}{2})$$

Por derivada se obtiene la ecuación de la Fuerza Cortante :

$$- \frac{V_X}{EI} = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3F}{16} - \frac{11F}{16}$$

$$- V_x = - \frac{1}{2}F$$

Para la siguiente condición de frontera se aplica el mismo procedimiento,para obtener las ecuaciones de la elástica por lo tanto en la ecuación 3 para

L≤X≤3L/2 :

$$Y_{(x)} = -\frac{FL^2}{128EI}X + \frac{3F}{96EI}X^3 - \frac{11F}{96EI}(X - \frac{L}{2})^3 + \frac{F}{6EI}(X - L)^3$$

La primera derivada de la flecha es igual a la Pendiente :

$$\theta_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{FL^2}{128EI} + \frac{9FX^2}{96EI} - \frac{33F}{96EI}(X - \frac{L}{2})^2 + \frac{3F}{6EI}(X - L)^2$$

$$\theta_x = -\frac{FL^2}{128EI} + \frac{3FX^2}{32EI} - \frac{11F}{32EI}(X - \frac{L}{2})^2 + \frac{F}{2EI}(X - L)^2$$

La siguiente derivada es igual a la ecuación del Momento Flexionante :

$$-\frac{M_x}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6FX}{32EI} - \frac{22F}{32EI}(X - \frac{L}{2}) + \frac{2F}{2EI}(X - L)$$

$$-M_x = \frac{3FX}{16} - \frac{11F}{16}(X - \frac{L}{2}) + F(X - L)$$

La siguiente derivada es igual a la ecuación de la Fuerza Cortante :

$$-\frac{V_x}{EI_1} = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3F}{16} - \frac{11F}{16} + F$$

$$-V_x = \frac{1}{2}F$$

De la ecuación 4 para 3L/2≤X≤2L se obtienen las siguientes ecuaciones :

$$Y_{(x)} = -\frac{FL^2}{128EI}X + \frac{3F}{96EI}X^3 - \frac{11F}{96EI}(X - \frac{L}{2})^3 + \frac{F}{6EI}(X - L)^3 - \frac{11F}{96EI}(X - \frac{3L}{2})^3$$

La primera derivada de la ecuación es igual a la Pendiente :

$$\theta_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{FL^2}{128EI} + \frac{9FX^2}{96EI} - \frac{33F}{96EI}(X - \frac{L}{2})^2 + \frac{3F}{6EI}(X - L)^2 - \frac{33F}{96EI}(X - \frac{3L}{2})^2$$

$$\theta_x = -\frac{FL^2}{128EI} + \frac{3FX^2}{32EI} - \frac{11F}{32EI}(X - \frac{L}{2})^2 + \frac{F}{2EI}(X - L)^2 - \frac{11F}{32EI}(X - \frac{3L}{2})^2$$

La siguiente derivada es igual a la ecuación del Momento :

$$-\frac{M_x}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6FX}{32EI} - \frac{22F}{32EI}(X - \frac{L}{2}) + \frac{2F}{2EI}(X - L)^2 - \frac{22F}{32EI}(X - \frac{3L}{2})$$

$$-M_x = \frac{3FX}{16} - \frac{11F}{16}(X - \frac{L}{2}) + F(X - L)^2 - \frac{11F}{16}(X - \frac{3L}{2})$$

Por último se obtiene la ecuación de la Fuerza Cortante :

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{V_x}{EI} = \frac{3F}{16EI} - \frac{11F}{16EI} + \frac{F}{EI} - \frac{11F}{16EI}$$

$$V_x = \frac{3}{16}F$$

C O N C L U S I O N E S .

De la misma forma que para los casos estaticamente determinados y para los hiperestáticos, estudiados en el Libro titulado " Deformaciones en Vigas Isostáticas e Hiperestáticas " ,en este Libro se estudiaron Vigas continuas para diderentes tipos de cargas y apoyos,con la aplicación de la Ecuación General de la Curva Elástica Desarrollada en Series de Potencias.

La INVESTIGACION realizada en los dos Libros en materia de ESTRUCTURAS , permiten establecer las siguientes conclusiones :

1 La Aplicación de la Ecuación representa una Alternativa de Análisis de Estructuras.

2 Con relación a otros métodos, se facilita el planteamiento de las ecuaciones de la Elástica para cada caso.

3 Se pueden obtener ecuaciones particulares de : Flecha , Pendiente , Momento Flexionante , Fuerza Cortante , y Carga , para cada caso .

4 Se INVESTIGO que los problemas resueltos sirven como base de conocimientos Fundamentales en materia de Resistencia de Materiales y Estructuras de la Carrera de Arquitectura.

5 El Libro presenta conceptos Básicos que pueden generar Futuras Investigaciones .

B I B L I O G R A F I A .

- DETERMINACION DE LA ECUACION DE LA ELASTICA DE VIGAS CON SERIES DE POTENCIAS.
AUTOR: DR. Porfirio Ballesteros
EDIT : U.N.A.M 1977

- RESISTENCIA DE MATERIALES I y II
AUTOR: ARQ. Eugenio Peschard
EDIT : U.N.A.M 1979

- RESISTENCIA DE MATERIALES
AUTOR: ARQ. Daniel Sierra Rodriguez
ARQ. Pedro Irigoyen Reyes
EDIT : DIANA

-RESISTENCIA DE MATERIALES
AUTOR: Schaumm
EDIT : Mc GRAW HILL

-MECANICA ANALITICA PARA INGENIEROS
AUTOR: Fred B. Seely ,M. S.
Newton E. Ensign M. A.
EDIT : UNION TIPOGRAFICA EDITORIAL HISPANO AMERICANA . MEXICO 1960

- DEFORMACIONES EN VIGAS ISOSTATICAS E HIPERESTATICAS
AUTOR: ARQ. Carlos Garcia Malo Flores
EDIT : UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA- AZCAPOTZALCO 1988

-DISENO ESTRUCTURAL
AUTOR: DR.Roberto Meli Piralla.
EDIT : LIMUSA 1990

- WORDPERFECT 5.1 Manual de Referencia.
AUTOR: Karen L. Acerson
EDIT : Mc GRAW HILL
1991

-APUNTES DE LA MAESTRIA EN ESTRUCTURAS DE LA FACULTAD DE INGENIERIA DE LA U.N.A.M. 1977
AUTOR: Ing. Guillermo García Malo Flores

Esta publicación termino de imprimirse
en Noviembre de 1993
en los Talleres de la Universidad
Autónoma Metropolitana Azcapotzalco,
la edición consta de 300 ejemplares

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Azcapotzalco

COSEI
COORDINACIÓN DE SERVICIOS DE INFORMACIÓN

Formato de Papeleta de Vencimiento

El usuario se obliga a devolver este libro en la fecha señalada en el sello mas reciente

Código de barras. ______________________

FECHA DE DEVOLUCION

- Ordenar las fechas de vencimiento de manera vertical.
- Cancelar con el sello de "DEVUELTO" la fecha de vencimiento a la entrega del libro.

UAM 2894812
TA660 Garcia Malo, Carlos
V5 Vigas estaticamente indet
G3.75

2894812

DR. GUSTAVO CHAPELA CASTAÑARES
Rector General UAM

DR. ENRIQUE FERNANDEZ FASSNACHT
Secretario General UAM

LIC. EDMUNDO JACOBO MOLINA
Rector UAM Azcapotzalco

MTRO. ADRIAN DE GARAY SANCHEZ
Secretario de la Unidad

M.D.I. EMILIO MARTINEZ DE VELASCO
Director de la División de CYAD

ARQ. ROSA ELENA ALVAREZ MARTINEZ
Jefa de Dpto. de Procesos y Técnicas de Realización